4. Скупови мере нула

Скупови мере нула су при интеграцији занемарљиви у следећем смислу: ако је $f : X \to \mathbb{C}$ интеграбилна у односу на меру μ и ако је N мерљив скуп, $\mu(N) = 0$, онда је $\int_N f\, d\mu = 0$. За позитивне функције је то већ доказано, а за комплексне то следи из дефиниције и разлагања $f = f_{\Re}^{+} - f_{\Re}^{-} + i f_{\Im}^{+} - i f_{\Im}^{-}$. То нас мотивише да уведемо следећу дефиницију.

Дефиниција 4.8. *Нека је P особина коју тачка $x \in X$ може имати. Кажемо да је својство P испуњено* **скоро свуда** *на мерљивом скупу A* **у односу на меру** *μ ако постоји скуп $N \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(N) = 0$ и да свака тачка $x \in A \setminus N$ има својство P.*

Када је потребно нагласити меру μ кажемо: P важи скоро свуда на A у односу на меру μ или краће $[\mu]$ с.с. на A. У случају комплетне мере μ горњи услов се своди на исказ да је скуп тачака $x \in A$ у којима P није испуњено скуп мере нула. Ако не спомињемо скуп A, онда подразумевамо да је $A = X$.

Својства која се често јављају су : $f(x) > 0$ за задану функцију f; низ $f_n(x)$ конвергира, где је $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ дати низ функција на X и.т.д.

Уведимо релацију еквиваленције $\sim$ у векторски простор свих комплексних мерљивих функција на X:

$$f \sim g \text{ ако и само ако је } f(x) = g(x) \text{ за } [\mu] \text{ с.с. } x \in X.$$

Да је $\sim$ релација еквиваленције следи из чињенице да је унија два скупа мере нула скуп мере нула: ако је $f = g$ ван N_1, $\mu(N_1) = 0$, а $g = h$ ван N_2, $\mu(N_2) = 0$, онда је $f = h$ ван $N = N_1 \cup N_2$, где је $\mu(N) = 0$. Рефлексивност и симетричност релације $\sim$ су очите.

Остављамо читаоцу да провери да је ова релација еквиваленције сагласна са алгебарским операцијама, поретком и граничним процесима, наиме да докаже следећа тврђења

ако је $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, онда је $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$;

ако је $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$ и $f_1 \le g_1$ скоро свуда, онда је $f_2 \le g_2$ скоро свуда;

ако је $f_n \sim g_n$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ постоји $[\mu]$ с.с., онда и $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ постоји $[\mu]$ с.с. и при томе је $f = g$ такође $[\mu]$ с.с.

Горња тврђења, као и њима аналогна ћемо користити без посебног наглашавања. Приметили смо да је релација $\sim$ сагласна и са интеграцијом, наиме, ако је $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ и ако је $f \sim g$, онда је и $g \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ и $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$ за сваки мерљив скуп $A \subset X$.

ЛЕМА 4.23. [о анулирању интеграла] ***Нека је f комплексна интеграбилна функција и нека је $\int_E f\,d\mu = 0$ за сваки мерљив скуп E. Тада је $f = 0$ скоро свуда.***

$\triangle$ Нека је $f = f_{\Re} + i f_{\Im}$ и нека је $E = f_{\Re}^{-1}((0, +\infty)) = \{x \in X : f_{\Re}(x) > 0\}$. Имамо $\int_E f_{\Re}^+\,d\mu = \int_E f_{\Re}\,d\mu = \Re\mathfrak{e} \int_E f\,d\mu = 0$. Како је $f_{\Re}^+$ строго позитивна функција на овако изабраном скупу E, следи да је $\mu(E) = 0$. Дакле, $f_{\Re} \leq 0$ скоро свуда, слично се доказује да је $f_{\Re} \geq 0$ с.с., па је $f_{\Re} = 0$ с.с. Аналогно је $f_{\Im} = 0$ с.с., па је $f = 0$ скоро свуда. $\square$

ЛЕМА 4.24. [о средњим вредностима] ***Нека је f комплексна интеграбилна функција на простору X са коначном мером μ. Претпоставимо да за сваки мерљив скуп E строго позитивне мере средња вредност***

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu$$

функције f на скупу E припада затвореном подскупу C комплексне равни. Тада $f(x) \in C$ за $[\mu]$ скоро свако $x \in X$.

$\triangle$ Отворен скуп $V = \mathbb{C} \setminus C$ се може представити као пребројива унија отворених дискова (кругова) $D_n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{D}(z_n, r_n) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_n| < r_n\}$. Скупови $E_n = f^{-1}(D_n)$ су мерљиви као инверзне слике отворених скупова, претпоставимо да је $\mu(E_n) > 0$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\left|\frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} f\,d\mu - z_n\right| = \left|\frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} (f(x) - z_n)\,d\mu(x)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\mu(E_n)} \int_{E_n} |f(x) - z_n|\,d\mu(x) < r_n,$$

при чему је последња неједнакост строга. Наиме, на скупу E_n који је строго позитивне мере важи $r_n - |f(x) - z_n| > 0$, па на основу става 4.15 б) важи $\int_{E_n} (r_n - |f(x) - z_n|)\,d\mu > 0$ односно $\int_{E_n} |f(x) - z_n|\,d\mu < r_n \mu(E_n)$. Горња неједнакост показује да средња вредност функције f на E_n припада $D_n = \mathbb{D}(z_n, r_n)$, што је контрадикција јер $D_n \cap C = \emptyset$. Дакле, $\mu(E_n) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $\mu(f^{-1}(V)) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$. Следи да $f(x) \in C$ за $[\mu]$ с.с. $x \in X$. $\square$

Корисно је уопштити појам мерљивости на функције које су дефинисане скоро свуда.

ДЕФИНИЦИЈА 4.9. *За функцију f, дефинисану на мерљивом скупу E таквом да је $\mu(E^{\complement}) = 0$, која узима вредности у $\mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{R}}$, кажемо да је* **мерљива** *на X ако је $f^{-1}(V) = \{x \in E : f(x) \in V\}$ мерљив скуп за сваки отворен скуп V у $\mathbb{C}$, односно у $\overline{\mathbb{R}}$.*

Ако такву функцију продужимо на читав простор X до функције $\tilde{f}$ тако што дефинишемо $\tilde{f}(x) = c$ за $x \notin E$, где је c константа (на пример $c = 0$), онда добијамо функцију која је мерљива у старом смислу, јер је тада скуп $\tilde{f}^{-1}(V)$ једнак или $f^{-1}(V)$ (ако је $c \notin V$) или $f^{-1}(V) \cup E^{\complement}$ (ако је $c \in V$). Ако је мера μ комплетна, онда можемо f потпуно произвољно продужити на $E^{\complement}$, тиме свакако добијамо мерљиву функцију на читавом простору X.

Из горњег следи да интеграл $\int_A \tilde{f}\, d\mu$, ако постоји, не зависи од избора константе c тако да можемо тада коректно дефинисати $\int_A f\, d\mu$.

Илуструјмо горња разматрања на случају простора $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, где је $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}$ је сигма алгебра свих подскупова од $\mathbb{N}$, а μ је бројачка мера на $\mathbb{N}$. Пре свега тада сваку функцију $x : \mathbb{N} \to Y$ можемо идентификовати са низом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у простору Y, где је $Y = \overline{\mathbb{R}}$ или $Y = \mathbb{C}$. Затим, свака таква функција је мерљива. С обзиром да је сваки непразан подскуп од $\mathbb{N}$ строго позитивне мере, следи да су две функије на $\mathbb{N}$ једнаке свуда ако су једнаке скоро свуда. Дакле, у том случају се релација еквиваленције "скоро свуда" своди на обичну једнакост.

Нека је сада $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ позитивних реалних бројева. Тада је $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, где је $f_n : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ задано формулом $f_n(k) = 0$ за $k \neq n$, $f_n(n) = x_n$. Функције f_n су просте позитивне и очито је $\int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = x_n$, па је на основу Beppo Levi-јевог става $\int_{\mathbb{N}} x\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Дакле, интеграција по $\mathbb{N}$ у односу на бројачку меру се своди на сумирање реда. Исто наравно важи и ако је $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ интеграбилна комплексна функција на $\mathbb{N}$, довољно је разложити z на реалан и имагинаран део: $z_n = x_n + iy_n$, а потом разложити $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ на позитиван и негативан део: $x = \{x_n^+ - x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ и $y = \{y_n^+ - y_n^-\}_{n=1}^{\infty}$ и применити доказано. Услов интеграбилности низа $z = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ је апсолутна конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$.

Glava 7

Odnos Rimanovog i Lebegovog integrala

7.1 Odnos Rimanovog i Lebegovog integrala

U ovom odeljku posmatramo skup $\mathbf{R}$ sa Lebegovom $\sigma-$algebrom $\mathcal{L}$ i Lebegovom merom m. Ako je $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničena (sa $A > 0$) merljiva funkcija, ona je i Lebeg–integrabilna, što sledi iz $\int_{[a,b]} |f| dm \leq A \int_{[a,b]} dm = A(b - a)$. Pokazaćemo da ako je f realna ograničena funkcija na $[a, b]$ i ako je Riman–integrabilna, onda je ona merljiva i Lebeg–integrabilna na $[a, b]$.

Teorema 7.1. Neka je f ograničena realna funkcija na $[a, b]$.

1) Ako je f Riman integrabilna, tada je f Lebeg integrabilna i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

2) Funkcija f je Riman integrabilna, ako i samo ako je skup prekida funkcije f mere 0.

Dokaz: Neka je $P(n)$ podela intervala $[a,b]$ data sa:

$$x_0 = a < x_1 < ... x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, ..., n,$$

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},\ M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$g_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_k \kappa_{[x_{k-1},x_k]}, \quad G_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} M_k \kappa_{[x_{k-1},x_k]},$$

$$s_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S_{P(n)} = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Neka se podele $P(n)$ profinjuju kad $n \in \mathbf{N}$, raste. Sledi

$$g_{P(n)} \leq g_{P(n+1)} \leq f \leq G_{P(n+1)} \leq G_{P(n)},\ n \in \mathbf{N}. \tag{7.1}$$

Neka je

$$\lim_{n\to\infty} g_{P(n)}(x) = g(x),\ \lim_{n\to\infty} G_{P(n)}(x) = G(x),\ x \in [a,b].$$

Navedeni limesi postoje na osnovu (7.1) Jasno, g i G su merljive i važi $g \leq f \leq G$. Koristićemo sledeće jednostavne jednakosti:

$$s_{P(n)} = \int_a^b g_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} g_{P(n)} dm, \tag{7.2}$$

$$S_{P(n)} = \int_a^b G_{P(n)}(x)dx = \int_{[a,b]} G_{P(n)} dm. \tag{7.3}$$

Iz (7.1), na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi

$$\int_{[a,b]} g_{P(n)} dm \to \int_{[a,b]} g dm,\ \int_{[a,b]} G_{P(n)} dm \to \int_{[a,b]} G dm.$$

Kako je f Riman integrabilna, na osnovu (7.2) i (7.3) sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm.$$

Kako je $g \leq G$, i $\int_{[a,b]}(G-g)dm = 0$, na osnovu Teoreme 5.4 sledi $G = g$ (s.s.). Iz (7.1) sledi $G = f$ (s.s.).

2) Neka je f Riman integrabilna.

Ako je f Riman integrabilna, na osnovu (7.1) važi $G = g(s.s.)$ pa je $f = G = g(s.s.)$.

Funkcija f je neprekidna u tački $t \in [a,b]$ ako i samo ako je $g(t) = G(t)$ (videti Zadatak 7.2). Kako je $G - g = 0$ (s.s.) sledi da je skup prekida funkcije f mere 0.

Obrnuto, neka je $g = G = f$ (s.s.). Kako su g i G merljive, f s.s. jednaka sa njima i mera m kompletna, sledi da je i f merljiva funkcija.

Sada iz $g = G(s.s.)$ sledi

$$\int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm$$

te je Rimanov integral $\int_a^b f(x)dx$ definisan i jednak je sa $\int_{[a,b]} gdm$. ■

Primer 7.1. Neka je $f = \kappa_{(0,1)\cap\mathbf{Q}}$. Ovo je primer funkcije koja je Lebeg-integrabilna, ali nije Riman-integrabilna, jer je svaka tačka iz $(0,1)$ tačka prekida. Lebegov integral je jednak sa $\int_{(0,1)} f\, dm = 1 \cdot m(\mathbf{Q} \cap (0,1)) + 0 \cdot m(Q^c \cap (0,1)) = 0$, jer je skup racionalnih brojeva mere nula.

Primer 7.2. Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Tada je nesvojstveni Rimanov integral konvergentan i važi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

ali Lebegov integral $\int_{[0,\infty)} fdm$ ne postoji jer je

$$\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}|\, dx = \infty.$$

Zaista, za proizvoljno $M \in \mathbf{N}$ važi

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{(M+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}| dx &= \sum_{k=1}^M \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^M \int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi} dt \\
&= \sum_{k=1}^M \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi} dt \geq \sum_{k=1}^M \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t\, dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^M \frac{1}{k+1},
\end{aligned}$$

pa je i $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty$.

Takođe, možemo videti i da je $f_+ = f \cdot \kappa_P$, gde je $P = \bigcup_{m\in\mathbf{N},k=2m} [k\pi,(k+1)\pi]$, i $f_- = f \cdot \kappa_N$, gde je $N = \bigcup_{m\in\mathbf{N},k=2m-1} [k\pi,(k+1)\pi]$. Sličnim rezonovanjem kao i malopre dobijamo da je $\int_0^\infty f_+(x)\,dx = \sum_{m=1,k=2m}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \infty$ i $\int_0^\infty f_-(x)\,dx = \infty$, pa integral nije definisan ni u proširenom smislu.

Primer 7.3. Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \kappa_{[n,n+1)}(x)$. Tada nesvojstveni Rimanov integral postoji jer je $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} < \infty$, ali $f \notin L^1(m)$ jer je $\int_{\mathbf{R}} |f|\ dm = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty$. To smo mogli zaključiti i na osnovu činjenice da je $\int_{\mathbf{R}} f_+\ dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+1} = \infty$, $\int_{\mathbf{R}} f_-\ dm = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2k+2} = \infty$, te izraz $\int_{\mathbf{R}} f\ dm = \int_{\mathbf{R}} f_+\ dm - \int_{\mathbf{R}} f_-\ dm$ nije definisan.

Prethodni primeri ukazuju na *apsolutnu* prirodu Lebegovog integrala tj. $f \in L^1(m)$ ako i samo ako $\int_R |f|\ dm < \infty$. Naredna teorema pokazuje da ako je neka merljiva funkcija nenegativna i postoji njen Rimanov nesvojstveni integral, tada postoji i Lebegov nesvojstveni integral i oni su međusobno jednaki.

Teorema 7.2. Neka je $f : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ merljiva funkcija za koju postoji Rimanov nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx < \infty$. Tada postoji i Lebegov integral $\int_{\mathbf{R}} f\ dm$ i važi

$$\int_{\mathbf{R}} f\ dm = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx.$$

Dokaz: Posmatrajmo niz funkcija $f_n = f \cdot \kappa_{[-n.n]}$, $n \in \mathbf{N}$. To je rastući niz merljivih funkcija za koji važi $f_n \nearrow f$, $n \to \infty$.

Na ograničenom intervalu $[-n,n]$ se Rimanov i Lebegov integral poklapaju na osnovu Teoreme 7.1 pa je

$$\int_{-n}^n f(x)\ dx = \int_{-n}^n f_n(x)\ dx = \int_{[-n,n]} f_n\ dm = \int_{[-n,n]} f\ dm. \tag{7.4}$$

Na osnovu uslova zadatka sledi da postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^n f(x)\ dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx < \infty. \tag{7.5}$$

Na osnovu Lebegove teoreme o monotonoj konvergenciji sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n\ dm = \int_R \lim_{n\to\infty} f_n\ dm = \int_R f\ dm. \tag{7.6}$$

Iz (7.4), (7.5) i (7.6) sledi da je $f \in L^1(m)$ i da važi $\int_{\mathbf{R}} f\ dm = \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$. ■